CLIFFORD A. PICKOVER a obținut doctoratul în fizică la Universitatea Yale. În prezent lucrează la IBM T.J. Watson Research Center. A primit patruzeci de premii pentru inovații și trei premii pentru activitatea sa de cercetare. Este unul dintre cei mai reputați și prolifici autori de popularizare a științei. Numeroasele sale cărți au fost traduse în italiană, franceză, greacă, germană, japoneză, chineză, coreeană, portugheză, spaniolă, turcă și polonă. Succesul lor se datorează neobișnuitei sale creativități, care se exprimă deopotrivă în știință, inginerie și grafică realizată pe calculator. Site-ul său de pe Internet a fost vizitat de 200 000 de utilizatori.

Cărți: *A Passion for Mathematics* (Wiley, 2005), *Sex, Drug, Einstein, and Elves* (Smart Publications, 2005), *Calculus and Pizza* (Wiley, 2003), *The Paradox of God and the Science of Omniscience* (Palgrave/St. Martin's Press, 2002), *The Stars of Heaven* (Oxford University Press, 2001), *The Zen of Magic Squares, Circles, and Stars* (Princeton University Press, 2001), *Dreaming The Future* (Prometheus, 2001), *Wonders of Numbers* (Oxford University Press, 2000), *The Girl Who Gave Birth to Rabbits* (Prometheus, 2000), *Surfing Through Hyperspace* (Oxford University Press, 1999), *The Science of Aliens* (Basic Books, 1998), *Time: A Traveler's Guide* (Oxford University Press, 1998), *Strange Brains and Genius: The Secret Lives of Eccentric Scientists and Madmen* (Plenum, 1998), *The Alien IQ Test* (Basic Books, 1997), *The Loom of God* (Plenum, 1997), *Black Holes – A Traveler's Guide* (Wiley, 1996) și *Keys to Infinity* (Wiley, 1995).

CLIFFORD A. PICKOVER

BANDA LUI MÖBIUS

Miraculoasa bandă a doctorului August Möbius în matematică, jocuri, literatură, artă, tehnologie și cosmologie

Traducere din engleză de
DIANA CONSTANTINESCU-ALTAMER

HUMANITAS
BUCUREȘTI

Madachy, Joseph S., *Madachy's Mathematical Recreations*, New York: Dover, 1979 (?).

M.C. Escher Foundation, Site-ul oficial al lui M.C. Escher: http://www.mcescher.com.

Pappas, Theoni, *The Joy of Mathematics*, San Carlos, California: Wide World Publishing/Tetra, 1989.

Möbius, August, *Gesammelte Werke*, Editori: Richard Baltzer, Felix Klein și Wilhelm Scheibner, 4 vol., Leipzig: retipărire, Dr. Martin Sändig oHg, Wiesbaden, 1967.

O'Connor, John J. și Edmund F. Robertson, „August Ferdinand Möbius" (scurtă biografie), http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Möbius.html.

Peterson, Ivars, „Möbius in the Playground", Ivars Peterson's Math Trek, *Science News Online* (22 mai 1999), http://www.sciencenews.org/sn_arc99/5_22_99/mathland.htm.

Peterson, Ivars, „More than Just a Plane Game", Ivars Peterson's Math Trek, *Science News Online* (14 martie 1998), http://www.sciencenews.org/sn_arc98/3_14_98/mathland.htm.

Peterson, Ivars, „Recycling topology", Ivars Peterson's Math Trek, *Science News Online* (28 septembrie 1996), http://www.sciencenews.org/sn_arc96/9_28_96/mathland.htm.

Peterson, Ivars, „Möbius and his Band", *Science News Online*, 158, nr. 2 (8 iulie 2000), http://www.sciencenews.org/articles/20000708/mathtrek.asp.

Weisstein, Eric, MathWorld, site găzduit de Wolfram Web, intrarea „Polyhedral Formula", http://mathworld.wolfram.com/PolyhedralFormula.html. (Dă o definiție a formulei poliedrului, stabilită de Euler.)

Wells, David, *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry*, Londra: Penguin Books, 1998.

Wikipedia Encyclopedia, intrarea „Möbius Strip", http://en.wikipedia.org/wiki/M%F6bius_strip.

CUPRINS

1

MAGICIENII LUI MÖBIUS

Möbius este un nume familiar în orice casă – cel puțin, în cele cu pretenții de cultură matematică – mulțumită unei jucării topologice. Dar August Möbius a influențat matematica la multe niveluri [...] Moștenirea lui modernă reprezintă o mare parte a aplicațiilor matematicii din ziua de astăzi.

Ian Stewart, „Moștenirea modernă a lui Möbius", în *Möbius and His Band*

Pe vremea când eram în clasa a treia, am participat la ziua de naștere a unui vecin, iar petrecerea s-a transformat într-un spectacol de magie. Un magician cu pălărie înaltă, neagră, mi-a dat o bandă care părea obținută prin alipirea capetelor unei panglici lucioase, în așa fel încât aceasta să formeze o buclă alungită. El avea trei astfel de bucle – una era roșie, alta albastră, iar cea de-a treia mov. Magicianul se numea domnul Magic. Foarte original.

Domnul Magic zâmbise când trasase câte o linie neagră de-a lungul axei fiecăreia dintre lungile fâșii de material. Era exact ca marcajele întrerupte dintre benzile unei șosele (fig. 1.1). Apoi arătase fâșiile audienței. Un puști se repezise să pună mâna pe ele, dar domnul Magic spusese ceva de genul: „Răbdare!"

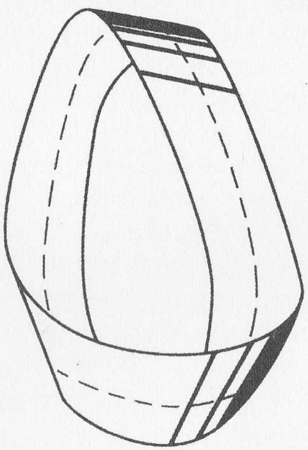


Fig. 1.1
O bandă Möbius, cu linia trasată de-a lungul axei.

Eram un copil timid și bine-crescut. Probabil că domnul Magic simțise acest lucru, pentru că mi-a dat o foarfecă. „Tinere, taie banda de-a lungul ei, exact pe linie", a spus, arătându-mi linia întreruptă de pe una dintre fâșiile de material.

Am fost entuziasmat și am continuat să tai banda roșie până când am ajuns în punctul de plecare al decupajului meu. Bucățile de panglică roșie au căzut de o parte și de alta, formând două inele total separate. „Mișto", am spus, deși în realitate nu eram prea impresionat. Totuși, mă întrebam ce va urma.

„Acum, taie-le și pe celelalte."

Am aprobat din cap. După ce am terminat și cu cea albastră, am constatat că aceasta a format o singură bandă, de două ori mai lungă decât cea inițială. Cineva a aplaudat. El mi-a întins banda rămasă – pe cea mov. Am tăiat-o și pe aceasta, iar ea a format două inele întrepătrunse, asemănătoare ochiurilor unui lanț.

Fiecare culoare se comporta cu totul altfel... asta chiar *era* mișto! Cele trei benzi aveau proprietăți total diferite, deși mi se păruseră identice. Câțiva ani mai târziu, misteriosul truc mi-a fost explicat de un prieten. Buclele roșie, albastră și mov fuseseră create fiecare în alt mod atunci când se alipiseră capetele panglicilor. Bucla obținută din panglica roșie fusese cel mai simplu de realizat. Fusese o buclă obișnuită, făcută fără a fi răsucită nici măcar o dată panglica, exact ca în cazul unei benzi transportoare sau al unei curele groase din cauciuc. Bucla albastră, în schimb, era exact faimoasa bandă a lui Möbius, formată prin răsucirea celor două capete ale panglicii cu 180 de grade una față de cealaltă, înainte de alipirea acestora. De regulă, metoda este cunoscută sub numele de „semirăsucire". Iar bucla mov fusese formată prin răsucirea unui capăt de panglică față de celălalt cu 360 de grade înainte de alipirea lor.

Astăzi, această scamatorie este cunoscută sub numele de Trucul Benzilor Afgane. Așa o numesc deseori magicienii, dar nu știm de unde i-ar putea proveni numele. În spectacole, a fost prezentată astfel începând de pe la 1904.

În conformitate cu cele scrise de Martin Gardner în *Mathematics, Magic and Mystery*, cele mai timpurii referințe privitoare la utilizarea benzii lui Möbius în scamatoriile de salon apar în ediția engleză din 1882 a cărții lui Gaston Tissandier, *Les récréations scientifiques*, publicată inițial la Paris, în 1881. Carl Brema, un american care fabrica tot felul de jucărioare magice, producea frecvent Benzi Afgane în 1920, utilizând șifon în loc de hârtie. În 1926, James A. Nelson a descris o metodă de pregătire a ștraifului de hârtie astfel ca cele două jumătăți rezultate prin tăiere să formeze un lanț de *trei* inele întrepătrunse (fig. 1.2).

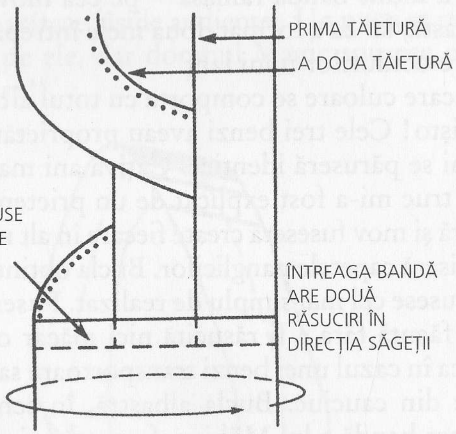


Fig. 1.2
Metoda lui James A. Nelson de pregătire a benzii „magice" de hârtie, așa încât cele două jumătăți rezultate prin tăiere să formeze un lanț de trei inele întrepătrunse.
(După Martin Gardner, *Mathematics, Magic and Mystery.*)

În 1948, magicianul Stanley Collins a descris un alt truc fascinant, făcut cu o bandă răsucită și un inel. A pus un mic inel metalic pe un ștraif de hârtie sau material textil, apoi a unit capetele ștraifului, dar numai după ce l-a răsucit de trei ori, pentru a forma o buclă închisă. Ca de obicei, magicianul tăia ștraiful pe mijloc (cum ai decupa de-a lungul liniei

de marcaj central a unei șosele) până când ajungea în punctul de pornire, rezultând astfel o bandă mare înnodată în jurul inelului.

În ziua de astăzi, magicianul profesionist Dennis Regling, care practică „magia evanghelică" pentru școlile de duminică și taberele religioase, utilizează magia benzii lui Möbius pentru a întări credința în Dumnezeu. Exact ca domnul Magic, Dennis folosește buclele în slujbele evanghelice, chemând la el trei voluntari. Apoi pune cele trei mari bucle pe capetele voluntarilor și explică: „...după cum ne-a creat Dumnezeu, deși suntem la fel din multe puncte de vedere, El a dat fiecăruia și niște daruri deosebite. Asta ne face să fim cu toții unici în ochii lui Dumnezeu." Și taie cele trei bucle diferit cu o foarfecă, obținând cele trei rezultate diferite, prezentate anterior.

Eric Reamer, un alt magician evanghelic profesionist, se folosește, de asemenea, de cele trei bucle pentru a-și promova religia. Eric aparține unui cult național evanghelic care, prin iluzionism, își propune să aducă „Adevărul Evangheliei lui Isus Cristos" în lumea celor „nevoiași". Întâi, el arată publicului bucla nerăsucită și spune: „Ador cercurile! Sunt extraordinare! Nu au început și nici sfârșit, iar asta îmi amintește de Dumnezeu!" Apoi, vorbește despre asemănarea cu eternitatea lui Isus și rupe bucla, pentru a forma două alte bucle, separate, dar identice, care îi simbolizează pe Dumnezeu Tatăl și Fiul.

Următorul pas este prezentarea buclei complet răsucite și explicarea faptului că Biblia ne învață că Dumnezeu ne-a creat după propriul Său chip și că „L-a trimis pe Isus ca să-L primim în inimile noastre și să fim pe veci alături de El!" Eric taie bucla, creând alte două, întrepătrunse.

În final, Eric prezintă adevărata buclă a lui Möbius, semirăsucită, și zice: „Dumnezeu trebuie să ne fi iubit foarte mult din moment ce L-a trimis la noi pe unicul Său Fiu, nu credeți?" Apoi îi cere auditoriului să-și imagineze cât de mare trebuie să fi fost dragostea Lui. Tăind bucla lui Möbius, le arată celor prezenți că aceasta își dublase lungimea. Eric afirmă că trucul folosește de asemenea la predarea unor lecții despre prietenie și căsătorie.

Vom aprofunda explicațiile privitoare la acest gen de magii în capitolele următoare, cercetând chiar și forme mai neobișnuite de bucle, dar deocamdată este amuzant să observăm că abstracta lucrare de matematică a lui Möbius, în care a prezentat bucla sa cu peste un secol în urmă, este astăzi folosită pentru a păcăli copiii și pentru magie evanghelică, destinată atragerii celor mici către Isus și adâncirii credinței în divinitate.

Enigma transportorului

Pentru această problemă de enigmistică, haideți să ne imaginăm că dr. Möbius a fost un inventator de mare succes, dar excentric. În cursul călătoriilor prin Saxonia, el născocește dispozitivul pentru exercițiu fizic prezentat în fig. 1.3. Speră că, într-o bună zi, va beneficia, împreună cu moștenitorii lui, de mulți bani de pe urma ingenioasei mașinării. Dar oare mașinăria chiar funcționează? În timp ce domnul Möbius aleargă, transportorul se rotește sau este blocat, făcându-l astfel să ajungă la capătul benzii rulante și să se prăbușească în adânca râpă de sub el? Ce efect are banda răsucită în forma cifrei opt asupra modului de funcționare a dispozitivului? Sistemul de operare ar fi diferit dacă acea bandă în formă de opt ar fi înlocuită cu o bandă Möbius (o buclă semi-răsucită)? Dacă dispozitivul nu funcționează, cum l-ați repara? Dispozitivul ar funcționa altfel dacă toate benzile lui ar fi răsucite? (Consultați secțiunea cu soluții pentru a afla răspunsul.)

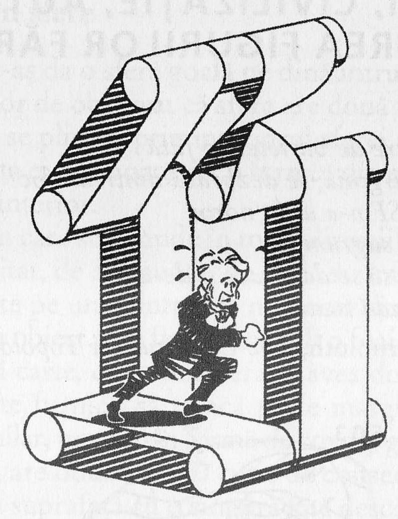


Fig. 1.3
Benzile transportorului domnului dr. Möbius s-ar roti fără probleme dacă banda răsucită în forma cifrei opt ar fi înlocuită cu o bandă care-i poartă numele? (Desen de Brian Mansfield.)

Un cuvânt despre locul lui Möbius în istorie

Faptul că numele lui Möbius a rămas în memoria noastră grație unei jucării topologice este un accident al istoriei. Dar faptul că el a observat un lucru simplu, pe care în două mii de ani oricine l-ar fi putut observa, e plin de semnificații – după cum e plin de semnificații și faptul că nimeni n-a făcut-o, cu excepția cazului lui Listing, care a descoperit banda simultan și independent.

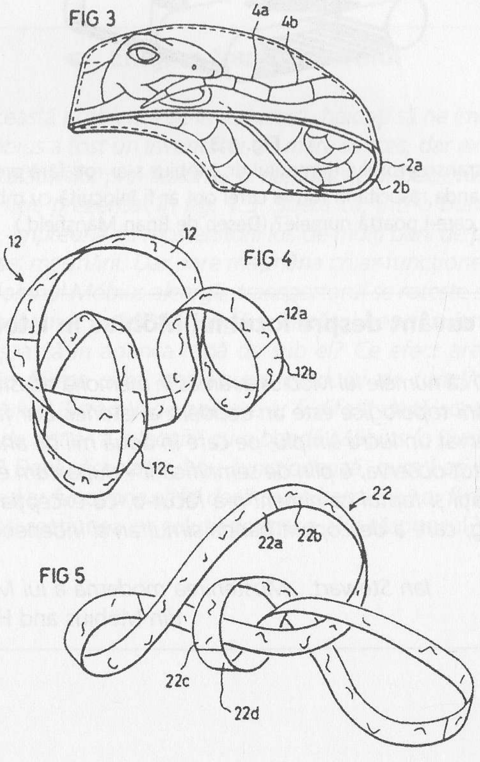
Ian Stewart, „Moștenirea modernă a lui Möbius",
din Möbius and His Band

2

NODURI, CIVILIZAȚIE, AUTISM ȘI PRĂBUȘIREA FIGURILOR FĂRĂ FEȚE

O dansatoare de varieteu, o fată
Pe nume Virginia, se dezbracă dintr-un foc!
Dar citind SF n-a avut noroc
Și a murit sugrumată
Încercând să se dezbrace și de-a lui
Möbius bandă toată.

Cyril Kornbluth, *The Unfortunate Topologist*, 1957



Furnici în sfere

Dacă v-aș da o sferă goală pe dinăuntru, cu o furnică în ea, este ușor de observat că sfera are două fețe distincte. O furnică ce se plimbă prin interiorul sferei nu poate ajunge pe suprafața ei exterioară, iar o furnică din exterior nu poate ajunge în interior.

Un plan care se extinde în toate direcțiile până la infinit este delimitat, de asemenea, de două suprafețe – o furnică ce se târăște pe una dintre ele nu poate ajunge pe cealaltă. Chiar și un obiect plan finit, cum ar fi o foaie de hârtie ruptă din această carte, este considerat a avea două fețe dacă nu i se permite furnicii să treacă peste marginile tăioase ale hârtiei. Similar, un corp în formă de covrig, gol pe dinăuntru, sau un tor, are două fețe. O cutie de conserve are tot două fețe. Prima suprafață cu o singură față descoperită și cercetată de oameni a fost banda lui Möbius. Pare exagerat să afirmăm că nici o ființă de pe pământ n-a descris proprietățile suprafețelor cu o singură față până la mijlocul secolului al XIX-lea, dar istoria științei și a matematicii n-a înregistrat astfel de observații.

Banda lui Möbius este o suprafață fascinantă cu o singură față și o singură margine. După cum am sugerat în capitolul anterior, pentru a crea banda nu trebuie decât să uniți cele două capete ale unei fâșii lungi de hârtie, după ce ați rotit în prealabil unul dintre capete cu 180 de grade în raport cu celălalt. Rezultă o suprafață cu o singură față – un gândăcel se poate târî din orice punct al unei astfel de suprafețe către oricare alt punct al ei și nu traversează niciodată marginea. În schimb, dacă uniți capetele benzii fără s-o răsuciți, rezultatul obținut va semăna cu un cilindru sau cu un inel, în funcție de grosimea benzii. Deoarece un cilindru are două fețe, puteți s-o colorați pe una dintre ele în roșu, iar pe cealaltă în verde. Dar încercați să luați creionul de colorat și să faceți același lucru cu banda lui Möbius. Este imposibil să obțineți o față roșie și una verde, deoarece are o singură față (fig. 2.1). Asta înseamnă totodată că puteți trasa o linie continuă între oricare dintre punctele benzii fără să-i traversați marginea.

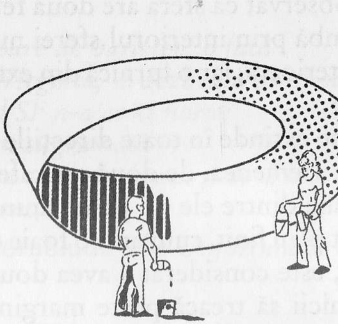


Fig. 2.1
Tentativă de colorare a benzii lui Möbius. Doi pictori sunt derutați când încearcă să obțină o față roșie și alta verde. Tocmai această derută este elementul-cheie al unei povestiri tragicomice intitulate „A. Botts și banda lui Möbius", prezentată în capitolul 8. Acolo, un pictor încearcă în mod repetat să coloreze doar o față a benzii lui Möbius.

Confecționați-vă singuri o bandă a lui Möbius chiar acum și așezați-o pe o masă. Puneți un deget pe o margine a ei, alt deget, pe „cealaltă". Pe unul țineți-l fix în timp ce-l plimbați pe al doilea de-a lungul marginii. În cele din urmă, degetul aflat în mișcare va atinge fiecare punct al marginii și se va lovi de cel fix, demonstrându-ne clar că banda are o singură margine. De fapt, orice fâșie de hârtie semirăsucită de un număr *impar* de ori este asemănătoare benzii lui Möbius, deoarece toate fâșiile de acest gen au o singură suprafață și o singură margine.

Tăierea benzii

Banda lui Möbius are numeroase proprietăți fascinante. Dacă o tăiați de-a lungul mijlocului ei, cum am văzut în capitolul 1, când am vorbit despre trucuri magice, în loc să

obțineți două benzi separate, veți avea doar o bandă lungă, cu două semirăsuciri. Dacă tăiați și această nouă bandă de-a lungul mijlocului ei, obțineți alte două, încolăcite una în jurul celeilalte. Cu alte cuvinte, această a doua tăiere duce la formarea a două benzi întrepătrunse.

Dacă însă tăiați o bandă a lui Möbius pe o linie longitudinală aflată, față de margine, la o distanță egală cu o treime din lățimea ei, veți obține două bucle – una este tot o bandă Möbius, dar mai îngustă, a doua este o bandă lungă, cu două răsuciri complete (o răsucire completă este o răsucire de 360 de grade). Încercați să vizualizați. Ați aflat că, efectuând tăierea pe *mijlocul* benzii lui Möbius, vă veți întoarce în punctul de plecare al decupajului, tot pe mijlocul benzii. Înainte de întoarcere, parcurgeți banda, de-a lungul ei, o singură dată. În celălalt caz însă, dacă începeți tăierea la o distanță de o treime din lățimea benzii, nu veți ajunge la punctul de început al decupajului decât după ce veți parcurge banda de două ori, deoarece la a doua „rotire" linia de tăiere se va afla, față de prima linie de tăiere, la o distanță de încă o treime din lățimea benzii.

Cu alte cuvinte, tăierea presupune două parcurgeri ale întregii benzi Möbius înainte de a vă întoarce în punctul de început și duce la obținerea a două benzi (fig. 2.2). Haideți să numim cele două benzi rezultante banda A și banda B. Banda A este identică cu banda Möbius inițială, numai că

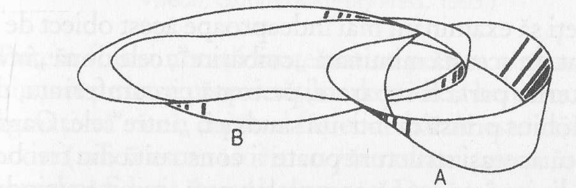


Fig. 2.2
Tăind o bandă a lui Möbius pe o linie longitudinală aflată, față de margine, la o distanță egală cu o treime din lățimea ei, se obțin două benzi – una este o bandă Möbius ceva mai îngustă, cealaltă este o bandă lungă, cu patru semirăsuciri.